EDL du premier degré

Exercice 1: Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y' + y = 4\text{ch}(x)$ sur $\mathbb{R}$
2. $(1+x^2)y' + xy = \sqrt{1+x^2}$ sur $\mathbb{R}$
3. $(1+\text{ch}(x))y' - \text{sh}(x)y = (1+\text{ch}(x))\text{sh}(x)$ sur $\mathbb{R}$
4. [**] $y' + \tan(x)y = 1$ sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$

Exercice 2: Résoudre les problèmes de Cauchy suivant

1. $\text{ch}(x)y' + \text{sh}(x)y = 0$ sur $\mathbb{R}$ avec $y(0) = 1$.
2. $\text{ch}(x)y' + \text{sh}(x)y = x\text{sh}(x)$ sur $\mathbb{R}$ avec $y(0) = 1$.

Exercice 3: Soit $(E_\alpha) : xy' - \alpha y = 0$, où $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. Résoudre (E_2) sur $]0, +\infty[$, puis sur $]-\infty, 0[$.
2. En déduire les solutions de (E_2) sur $\mathbb{R}$.
3. Avec un raisonnement analogue, déterminer les solutions de (E_α) sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4: [**] Résoudre l'équation suivante sur les 3 intervalles proposés:

$$(1-x^2)y' - 2xy = x^2$$

1. sur $I =]-\infty, -1[$
2. sur $I =]-1, 1[$
3. sur $I =]-\infty, 1[$

EDL du second degré

Exercice 5: Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y'' - 4y' + 4y = \sin(x)$
2. $y'' - y' - 6y = \mathbf{e}^{3x} + \sin(x)$
3. $y'' - 3y' + 4y = 6x + 1 + 7\mathbf{e}^{-x}$

Exercice 6: Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y'' - y' + y = \mathbf{i}y$
2. $y'' - 4\mathbf{i}y' - 3y = \sin(x)$

Exercice 7: Résoudre le système suivant dont les inconnues sont des fonctions x et y dérivables sur $\mathbb{R}$

$$\begin{cases} x' = x + y \\ y' = x - y \\ x(0) = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Exercice 8: On cherche les fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f'(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$$

1. Soit f une telle fonction.
   (a) Trouver une équation différentielle à coefficients non constants du second ordre dont f est solution.
   (b) On introduit la fonction $g : t \mapsto f(\mathbf{e}^t)$. Montrer que g est solution de $(E) : y'' - y' + y = 0$.
   (c) En déduire une forme de g puis de f.
   (d) Comparer $f(1)$ et $f'(1)$. En déduire une forme plus explicite de f.
2. Répondre au problème.